

Im Schwerpunkt der Anschlusspunkte – Zur Genauigkeit geodätischer Koordinatentransformationen

Prof. Dr.-Ing. RÜDIGER LEHMANN,
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden,
Fakultät Geoinformation,
Friedrich-List-Platz 1, 01069 Dresden,
Tel 03 51-4 62-31 46,
Fax 03 51-4 62-21 91,
mailto:r.lehmann@htw-dresden.de

Meinem verehrter Kollegen Prof. Dr.-Ing. Asim Bilajbegovic zum 60. Geburtstag gewidmet

Zusammenfassung: Eine in der Geodäsie bekannte Regel besagt, dass die Genauigkeit zu transformierender Neupunkte im Schwerpunkt der Anschlusspunkte am höchsten ist. Weniger bekannt ist, unter welchen Voraussetzungen dies generell gilt. Allgemein unbekannt ist bisher, auf welche Koordinatentransformationen man diese Regel ausdehnen kann. Wir zeigen dies auf und untersuchen einen Fall, in dem diese Regel nicht gilt. Es stellt sich heraus, dass der am genauesten transformierbare Neupunkt theoretisch sogar außerhalb der konvexen Hülle der Anschlusspunkte liegen kann.

Abstract: A rule well-known in Geodesy states that the accuracy of points to be transformed is best in the centre of gravity of the control points. Less well-known is, under which conditions this rule generally applies. The exact set of coordinate transforms, to which we can extend the validity of this rule, is widely unknown. We demonstrate this and investigate a case, in which this rule does not apply. It turns out that the most accurately transformable point be even be located outside the convex hull of the control points.

1 Einführung

Geodätische Koordinatentransformationen spielen in allen Bereichen der Geodäsie eine zentrale Rolle (Bilajbegovic 2001), darüber hinaus in vielen Nachbardisziplinen wie der Photogrammetrie oder der Kartographie.

Probleme geodätischer Koordinatentransformationen lassen sich als Bestimmung einer Abbildung $\varphi: V \rightarrow V'$ zwischen den d -dimensionalen Vektorräumen V (Startsystem) und V' (Zielsystem) formulieren. Wir betrachten folgend nur ebene und räumliche Koordinatentransformationen ($d=2$ oder $d=3$)

Gegeben sind eine Menge identischer Punkte (Anschlusspunkte) mit Koordinaten in beiden Systemen:

Startsystemkoordinaten	$x_1, x_2, \dots, x_n \in V$
Zielsystemkoordinaten	$x'_1, x'_2, \dots, x'_n \in V'$

und Neupunkte N_1, N_2, \dots mit Startsystemkoordinaten $x_{N_1}, x_{N_2}, \dots \in V$. Hinzu kommt ein parametrisches Modell für φ mit genau oder weniger als dn Parametern und ein stochastisches Modell für die gegebenen Koordinaten in Form von Kovarianz- oder Gewichtsmatrizen. Gesucht sind die zugehörigen Zielsystemkoordinaten $x'_{N_1}, x'_{N_2}, \dots \in V'$ mit bestmöglicher Genauigkeit.

Die Komponenten der Vektoren bezeichnen wir in der Ebene mit x, y und im Raum mit x, y, z . Wir wollen im Weiteren entartete Verteilungen der Anschlusspunkte ausschließen, so dass alle folgenden Matrizen regulär sind.

Die Genauigkeit eines Punktes N in der Ebene und im Raum wird vollständig durch die Kovarianzmatrix $\sigma_0^2 \mathbf{Q}_N$ des Koordinatenvektors beschrieben. Hier bedeutet σ_0^2 den Varianzfaktor und \mathbf{Q}_N die Kofaktorenmatrix mit den Kofaktoren $q_N^{xx}, q_N^{xy}, q_N^{yy}$ und im Raum zusätzlich $q_N^{xz}, q_N^{yz}, q_N^{zz}$. Als skalare Maße für die Genauigkeit eines Punktes verwendet man in der Geodäsie meist den Helmertschen Punktfehler (Helmert 1924)

$$\sigma_N^H := \sigma_0 \sqrt{\text{spur}(\mathbf{Q}_N)}, \quad (1)$$

alternativ dazu den Werkmeisterschen Punktfehler (Werkmeister 1920)

$$\sigma_N^W := \sigma_0 \sqrt[4]{\det(\mathbf{Q}_N)}. \quad (2)$$

Letzterer Punktfehler drückt die über die Punktlage gewonnene Informationsmenge im Sinne der Informationstheorie aus (Meier 1999). Beide Maße sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. In der Ebene erhält man insbesondere

$$\sigma_N^H = \sigma_0 \sqrt{q_N^{xx} + q_N^{yy}} \quad (1a)$$

$$\sigma_N^W = \sigma_0 \sqrt[4]{q_N^{xx} q_N^{yy} - (q_N^{xy})^2} \quad (2a)$$

(Grafarend 1968, Wolf 1994). Für einige Berechnungen ist es nützlich, dass der Startsystemkoordinatenursprung zuvor auf den Schwerpunkt der identischen Punkte verschoben wurde (dritte Summe entfällt in der Ebene):

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \sum_{i=1}^n p_i y_i = \sum_{i=1}^n p_i z_i = 0 \quad (3)$$

Der Begriff des Schwerpunkts ist zunächst nur sinnvoll, wenn sämtlichen Koordinaten jedes identischen Punktes jeweils gleiche Gewichte $p_i > 0$ zugeordnet werden können. Die Gewichtsmatrix nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\text{in der Ebene} \quad \mathbf{P} = \text{diag}\{p_1, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n, p_n\} \quad (4a)$$

$$\text{im Raum} \quad \mathbf{P} = \text{diag}\{p_1, p_1, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n, p_n, p_n\} \quad (4b)$$

Einfache Formeln für die Genauigkeit der Neupunkte gewinnt man nur, wenn alle Startsystemkoordinaten als fehlerfrei angenommen werden, eine übliche, aber durchaus weitreichende Einschränkung der Anwendbarkeit, die wir im Folgenden ebenfalls machen.

2 Ebene Helmert-Transformation (Ähnlichkeitstransformation)

Die einfachste praktisch bedeutende geodätische Koordinatentransformation ist die ebene Helmert-Transformation mit den Transformationsgleichungen ($i = 1, \dots, n$)

$$\begin{aligned}x'_i &= t_x + a \cdot x_i + o \cdot y_i \\y'_i &= t_y - o \cdot x_i + a \cdot y_i\end{aligned}\quad (5)$$

und den Transformationsparametern t_x, t_y, a, o . Zur Bestimmung der Transformationsparameter durch Ausgleichung nach kleinsten Quadraten (L_2 -Norm-Minimierung) gewinnt man hieraus die Funktionalmatrix (auch Jacobi- oder Design-Matrix)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & y_1 & -x_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & y_n & -x_n \end{pmatrix}$$

und schließlich unter Beachtung von (3) und (4a) die Kofaktorenmatrix der Parameter

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \text{diag}\{1/p, 1/p, 1/h, 1/h\}$$

mit den Abkürzungen

$$p := \sum_{i=1}^n p_i, \quad h := \sum_{i=1}^n p_i (x_i^2 + y_i^2) > 0. \quad (6)$$

Die Kofaktorenmatrix der Neupunktkoordinaten im Zielsystem \mathbf{Q}_N erhält man durch Kovarianzfortpflanzung in

$$\mathbf{x}'_N = \mathbf{F} \cdot (t_x \ t_y \ a \ o)^T$$

mit

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_N & y_N \\ 0 & 1 & y_N & -x_N \end{pmatrix}$$

zu

$$\mathbf{Q}_N = \mathbf{F} \mathbf{Q} \mathbf{F}^T = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{h} (x_N^2 + y_N^2) \right) \mathbf{I}. \quad (7)$$

Die Fehlerellipsen (Helmertsche Standardellipsen) aller Neupunkte im Zielsystem sind somit Kreise. Es ergeben sich folgende Punktfehler:

$$\sigma_N^H = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{p} + \frac{2}{h} (x_N^2 + y_N^2)} \quad (8)$$

$$\sigma_N^W = \sigma_0 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{h} (x_N^2 + y_N^2) \right) \quad (9)$$

Nach beiden Punktfehlermaßen wird die höchste Genauigkeit der Neupunkte im Schwerpunkt (0,0) der identischen Punkte erreicht. Die Kurven gleicher Neupunktgenauigkeit sind Kreise um diesen Schwerpunkt.

3 Ebene Affin-Transformation

Die Transformationsgleichungen lauten in diesem Fall ($i = 1, \dots, n$)

$$x'_i = t_x + a \cdot x_i + c \cdot y_i \quad (10)$$

$$y'_i = t_y + b \cdot x_i + d \cdot y_i$$

mit den Transformationsparametern t_x, t_y, a, b, c, d . Die Funktionalmatrix \mathbf{A} nimmt folgende Gestalt an:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & x_n & 0 & y_n \end{pmatrix}$$

Für die Berechnung ist es nützlich, dass die Koordinatenachsen des Startsystems so gedreht werden, dass sie mit den Hauptträgheitsachsen der identischen Punkte zusammen fallen, sofern diese eindeutig definiert sind (siehe Anhang), so dass

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i y_i = 0 \quad (11)$$

gilt. Hieraus und unter Beachtung von (3) und (4a) folgt die Kofaktorenmatrix der Parameter

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \text{diag}\{1/p, 1/p, 1/h_x, 1/h_x, 1/h_y, 1/h_y\}$$

mit den Abkürzungen

$$p := \sum_{i=1}^n p_i, \quad h_x := \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 > 0, \quad h_y := \sum_{i=1}^n p_i y_i^2 > 0. \quad (12)$$

Die Kofaktorenmatrix der Neupunktkoordinaten im Zielsystem \mathbf{Q}_N erhält man durch Kovarianzfortpflanzung in

$$\mathbf{x}'_N = \mathbf{F} \cdot (t_x \ t_y \ a \ b \ c \ d)^T$$

mit

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_N & 0 & y_N & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_N & 0 & y_N \end{pmatrix}$$

zu

$$\mathbf{Q}_N = \mathbf{F} \mathbf{Q} \mathbf{F}^T = \left(\frac{1}{p} + \frac{x_N^2}{h_x} + \frac{y_N^2}{h_y} \right) \mathbf{I}. \quad (13)$$

Die Fehlerellipsen aller Neupunkte im Zielsystem sind somit Kreise. Es ergeben sich folgende Punktfehler:

$$\sigma_N^H = \sigma_0 \sqrt{2 \left(\frac{1}{p} + \frac{x_N^2}{h_x} + \frac{y_N^2}{h_y} \right)} \quad (14)$$

$$\sigma_N^W = \sigma_0 \left(\frac{1}{p} + \frac{x_N^2}{h_x} + \frac{y_N^2}{h_y} \right) \quad (15)$$

Nach beiden Punktfehlermaßen wird die höchste Genauigkeit der Neupunkte im Schwerpunkt (0,0) der identischen Punkte erreicht. Die Kurven gleicher Neupunktgenauigkeit sind Ellipsen um diesen Schwerpunkt mit Achsen parallel zu den Hauptträgheitsachsen der identischen Punkte.

4 Ebene Drei-Parameter-Transformation (Kongruenztransformation)

Diese Transformation wird gelegentlich als „Helmerttransformation mit bekanntem Maßstab“ bezeichnet. Der Maßstab μ , falls $\mu \neq 1$ ist, sei an den Startsystemkoordinaten schon angebracht worden. Die Transformationsgleichungen lauten dann ($i = 1, \dots, n$)

$$x'_i = t_x + x_i \cdot \cos \varepsilon + y_i \cdot \sin \varepsilon \quad (16)$$

$$y'_i = t_y - x_i \cdot \sin \varepsilon + y_i \cdot \cos \varepsilon$$

mit den Transformationsparametern t_x, t_y, ε . Die Funktionalmatrix \mathbf{A} nimmt folgende Gestalt an:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_1 \cdot \sin \varepsilon + y_1 \cdot \cos \varepsilon \\ 0 & 1 & -x_1 \cdot \cos \varepsilon - y_1 \cdot \sin \varepsilon \\ 1 & 0 & -x_2 \cdot \sin \varepsilon + y_2 \cdot \cos \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & -x_n \cdot \cos \varepsilon - y_n \cdot \sin \varepsilon \end{pmatrix}$$

Im Unterschied zu den linearen Modellen (5) und (10) hängt \mathbf{A} hier von einem Transformationsparameter ab, nämlich ε , den man z.B. näherungsweise aus einer Helmert-Transformation (5) gewinnt. Unter Beachtung von (3) und (4a) folgt die nicht mehr von ε abhängige Kofaktorenmatrix der Parameter

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \text{diag}\{1/p, 1/p, 1/h\}$$

mit den Abkürzungen (6). Die Kofaktorenmatrix der Neupunktkoordinaten \mathbf{Q}_N erhält man durch Kovarianzfortpflanzung mit der Funktionalmatrix

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_N \cdot \sin \varepsilon + y_N \cdot \cos \varepsilon \\ 0 & 1 & -x_N \cdot \cos \varepsilon - y_N \cdot \sin \varepsilon \end{pmatrix} \quad (17)$$

zu

$$\mathbf{Q}_N = \mathbf{F} \mathbf{Q} \mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} q_N^{xx} & q_N^{xy} \\ q_N^{xy} & q_N^{yy} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$q_N^{xx} = \frac{1}{p} + \frac{1}{h} (x_N \cdot \sin \varepsilon - y_N \cdot \cos \varepsilon)^2$$

$$q_N^{yy} = \frac{1}{p} + \frac{1}{h}(x_N \cdot \cos \varepsilon + y_N \cdot \sin \varepsilon)^2$$

$$q_N^{xy} = \frac{1}{h}(-x_N \cdot \cos \varepsilon - y_N \cdot \sin \varepsilon)(x_N \cdot \sin \varepsilon - y_N \cdot \cos \varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{h} \left(\frac{y_N^2 - x_N^2}{2} \sin 2\varepsilon + x_N y_N \cos 2\varepsilon \right)$$

Die Fehlerellipsen der Neupunkte im Zielsystem sind somit im Allgemeinen abgeplattet. Es ergeben sich folgende Punktfehler:

$$\sigma_N^H = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{p} + \frac{1}{h}(x_N^2 + y_N^2)} \quad (19)$$

$$\sigma_N^W = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{ph}(x_N^2 + y_N^2)} \quad (20)$$

Nach beiden Punktfehlermaßen wird die höchste Genauigkeit der Neupunkte im Schwerpunkt (0,0) erreicht. Die Kurven gleicher Neupunktgenauigkeit sind Kreise um diesen Schwerpunkt.

5 Räumliche 12-Parameter- Affin-Transformation

Die Transformationsgleichungen ($i = 1, \dots, n$)

$$\begin{aligned} x'_i &= t_x + a_{xx} \cdot x_i + a_{yx} \cdot y_i + a_{zx} \cdot z_i \\ y'_i &= t_y + a_{xy} \cdot x_i + a_{yy} \cdot y_i + a_{zy} \cdot z_i \\ z'_i &= t_z + a_{xz} \cdot x_i + a_{yz} \cdot y_i + a_{zz} \cdot z_i \end{aligned} \quad (21)$$

definieren die räumliche Affintransformation mit den Transformationparametern $t_x, t_y, t_z, a_{xx}, a_{xy}, \dots, a_{zz}$. (Gelegentlich wird in der Geodäsie die 9-Parameter-Transformation mit drei Translationsparametern, drei Rotationswinkeln und drei Maßstäben als „räumliche Affintransformation“ bezeichnet.) Die Funktionalmatrix \mathbf{A} nimmt folgende Block-Gestalt an:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & x_1 \mathbf{I} & y_1 \mathbf{I} & z_1 \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & x_2 \mathbf{I} & y_2 \mathbf{I} & z_2 \mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{I} & x_n \mathbf{I} & y_n \mathbf{I} & z_n \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

(\mathbf{I} ist die 3x3-Identitätsmatrix.) Für die Berechnung ist es nützlich, dass die Koordinatenachsen des Startsystems so gedreht werden, dass sie mit den Hauptträgheitsachsen der identischen Punkte zusammen fallen, sofern diese eindeutig definiert sind (siehe Anhang), so dass

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i y_i = \sum_{i=1}^n p_i x_i z_i = \sum_{i=1}^n p_i y_i z_i = 0 \quad (22)$$

gilt. Unter weiterer Beachtung von (3) und (4b) folgt die Kofaktorenmatrix der Parameter

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \text{diag}\{1/p, 1/p, 1/p, 1/h_x, 1/h_x, 1/h_x, 1/h_y, 1/h_y, 1/h_y, 1/h_z, 1/h_z, 1/h_z\}$$

mit den Abkürzungen (12) und

$$h_z := \sum_{i=1}^n p_i z_i^2 > 0.$$

Die Kofaktorenmatrix der Neupunktkoordinaten \mathbf{Q}_N erhält man durch Kovarianzfortpflanzung in

$$\mathbf{x}'_N = \mathbf{F} \cdot (t_x \ t_y \ t_z \ a_{xx} \ a_{xy} \ \dots \ a_{zz})^T$$

mit

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I} \ x_N \mathbf{I} \ y_N \mathbf{I} \ z_N \mathbf{I})$$

zu

$$\mathbf{Q}_N = \mathbf{F} \mathbf{Q} \mathbf{F}^T = \left(\frac{1}{p} + \frac{x_N^2}{h_x} + \frac{y_N^2}{h_y} + \frac{z_N^2}{h_z} \right) \mathbf{I} \quad (23)$$

Die Fehlerellipse aller Neupunkte im Zielsystem sind somit Kugeln. Es ergeben sich folgende Punktfehler:

$$\sigma_N^H = \sigma_0 \sqrt{3 \left(\frac{1}{p} + \frac{x_N^2}{h_x} + \frac{y_N^2}{h_y} + \frac{z_N^2}{h_z} \right)} \quad (24)$$

$$\sigma_N^W = \sigma_0 \left(\frac{1}{p} + \frac{x_N^2}{h_x} + \frac{y_N^2}{h_y} + \frac{z_N^2}{h_z} \right) \quad (25)$$

Nach beiden Punktfehlermaßen wird die höchste Genauigkeit der Neupunkte im Schwerpunkt (0,0,0) der identischen Punkte erreicht. Die Flächen gleicher Neupunktgenauigkeit sind Ellipsoide um diesen Schwerpunkt mit Achsen parallel zu den Hauptträgheitsachsen der identischen Punkte.

6 Verallgemeinerung

Sollte die Normalgleichungsmatrix $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ keine Diagonalgestalt annehmen, so lassen sich die Betrachtungen des letzten Abschnitts nicht durchführen, und man gelangt nicht zu solchen einfachen Formeln wie (8),(9),(14),(15),(19),(20),(24),(25). Es kann jedoch immer noch gezeigt werden, dass die höchste Genauigkeit der Neupunkte im Schwerpunkt der identischen Punkte erreicht wird, solange

1. die Gewichtsmatrix \mathbf{P} von der Form (4a) oder (4b) ist,
2. alle Startsystemkoordinaten als fehlerfrei anzunehmen sind, und
3. das Transformationsmodell von der allgemeinen Form

$$\mathbf{x}' = \mathbf{t} + \mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{x}$$

ist.

Hierin bedeutet \mathbf{t} den $(d,1)$ -Translationsparametervektor, \mathbf{T} die (d,d) -Transformationsmatrix, abhängig von einem $(m,1)$ -Parametervektor \mathbf{u} , der z.B. einen oder mehrere Maßstäbe und Drehwinkel enthält. (Beispiel Drei-Parameter-Transformation: $\mathbf{u}=\varepsilon$, $m=1$.)

Von dieser Form sind neben den bereits behandelten folgende Transformationen:

- Ebene Fünf-Parameter-Transformation
- Räumliche Sechs-Parameter-Transformation (Kongruenztransformation)
- Räumliche Sieben-Parameter-Helmerttransformation (Ähnlichkeitstransformation)
- Räumliche Neun-Parameter-Transformation (verallgemeinerte Helmerttransformation mit drei Maßstäben)

Die Funktionalmatrix \mathbf{A} nimmt folgende Gestalt an:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T}_{u_1}(\mathbf{u})\mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{T}_{u_m}(\mathbf{u})\mathbf{x}_1 \\ & & \ddots & \\ \mathbf{I} & \mathbf{T}_{u_1}(\mathbf{u})\mathbf{x}_n & \dots & \mathbf{T}_{u_m}(\mathbf{u})\mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

Hierbei sind $\mathbf{T}_{u_j}(\mathbf{u}), j = 1, \dots, m$ die Matrizen der Ableitungen von \mathbf{T} nach dem Parameter u_j . Die Normalgleichungsmatrix $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ hat wegen (3) und folglich für alle $j = 1, \dots, m$

$$\sum_{i=1}^n p_i \mathbf{T}_{u_j}(\mathbf{u}) \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

Blockdiagonalstruktur. Dasselbe gilt dann für die Kofaktorenmatrix der Parameter

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} p^{-1} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{uu} \end{pmatrix}$$

mit Diagonalblöcken vom Format (d, d) und (m, m) und p aus (6). Die Kofaktorenmatrix der Neupunktkoordinaten \mathbf{Q}_N erhält man durch Kovarianzfortpflanzung mit der Funktionalmatrix

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I} \quad \mathbf{T}_{u_1}(\mathbf{u})\mathbf{x}_N \quad \dots \quad \mathbf{T}_{u_m}(\mathbf{u})\mathbf{x}_N)$$

zu

$$\mathbf{Q}_N = \mathbf{F} \mathbf{Q} \mathbf{F}^T = \frac{1}{p} \mathbf{I} + \sum_{j=1}^m \left(\mathbf{T}_{u_j}(\mathbf{u}) \mathbf{x}_N \mathbf{x}_N^T \sum_{k=1}^m \mathbf{T}_{u_k}(\mathbf{u})^T q_{u_j u_k} \right). \quad (26)$$

Alle Kofaktoren in \mathbf{Q}_N sind als Funktion von \mathbf{x}_N quadratische Polynome mit stationärem Punkt in $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, denn (26) enthält keine linearen Terme in \mathbf{x}_N . Wegen der positiven Definitheit der Kofaktorenmatrix und somit auch der Hesse-Matrizen ist dieser Punkt ein Minimum. Ebenso folgt diese Eigenschaft für den Helmertschen Punktfehler σ_N^H , wogegen beim Werkmeisterschen Punktfehler σ_N^W , zumindest klar ist, dass $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ ein stationärer Punkt ist, denn $\det(\mathbf{Q}_N)$ enthält keine linearen Terme in \mathbf{x}_N . Die Minimum-Eigenschaft wäre ggf. etwas aufwändiger nachzuweisen.

Im Schwerpunkt ist die Genauigkeit des transformierten Punktes für alle Transformationen gleich groß, sie beträgt $\sigma_N^H = \sigma_0 \sqrt{d/p}$ und $\sigma_N^W = \sigma_0/p$. Die Fehlerellipsen sind Kreise, die Fehlerellipsoide sind Kugeln, jeweils mit dem Radius σ_0/\sqrt{p} , unabhängig von der Verteilung der identischen Punkte.

7 Am genauesten transformierbarer Neupunkt nicht im Schwerpunkt

In den anderen als den hier behandelten Fällen, insbesondere bei fortgeschrittenen Techniken wie der Restklaffenverteilung nach der häufig eingesetzten Multiquadratischen Methode nach Hardy (1972), siehe (Beineke 2007), der Kollokation nach kleinsten Quadraten von Moritz (1973), siehe (Reinking 1994), der Methode der Thin-Plate-Splines oder verwandter Methoden (Gielsdorf und

Gründig 1997), aber auch bei fehlerbehafteten Startsystemkoordinaten der identischen Punkte, liegt der am genauesten transformierbare Neupunkt im Allgemeinen nicht im Schwerpunkt der identischen Punkte. Um das zu zeigen, genügt ein einfaches numerisches Beispiel. Hat die Gewichtsmatrix nicht die Gestalt (4a) oder (4b), so ist bereits die Definition eines Schwerpunktes problematisch.

Mindestens in einem nichttrivialen und praktisch relevanten Fall kann man trotzdem für die Lage des am genauesten transformierbaren Neupunktes eine einfache analytische Formel angeben:

8 Drei-Parameter-Transformation mit abgeplatteten Fehlerellipsen für die identischen Punkte im Zielsystem

Wir betrachten die Drei-Parameter-Transformation aus Abschnitt 4 und lassen jetzt aber abgeplattete Fehlerellipsen für die identischen Punkte im Zielsystem zu, wobei sämtliche Halbachsen parallel ausgerichtet sind bzw. aufeinander senkrecht stehen. Die Zielsystem-Koordinatenachsen drehen wir parallel zu diesen Achsen, so dass die Gewichtsmatrix folgende Form annimmt:

$$\mathbf{P} = \text{diag}\{p_{x_1}, p_{y_1}, p_{x_2}, \dots, p_{y_{n-1}}, p_{x_n}, p_{y_n}\}$$

In der Praxis kann dieser Fall z.B. auftreten, wenn die Koordinatenbestimmung im Zielsystem in einer gemeinsamen Richtung ungenauer ist, z.B. bei GPS-Punkten außerhalb des Äquatorgürtels, in Nord-Süd-Richtung, oder wenn durch gemeinsame Abschattungen in einer Richtung weniger Satelliten zur Verfügung stehen.

Dann wird der Startsystem-Koordinatenursprung auf einen verallgemeinerten Schwerpunkt der identischen Punkte verschoben, so dass gilt:

$$\sum_{i=1}^n p_{x_i} x_i = \sum_{i=1}^n p_{y_i} y_i = 0 \quad (27)$$

Die Funktionalmatrix ist unverändert durch (17) gegeben. Die Normalgleichungsmatrix lautet jetzt

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} p_x & 0 & n_{13} \\ 0 & p_y & n_{23} \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} \end{pmatrix}$$

mit den Abkürzungen

$$p_x := \sum_{i=1}^n p_{x_i}, \quad p_y := \sum_{i=1}^n p_{y_i}$$

$$n_{13} := \sum_{i=1}^n p_{x_i} (-x_i \cdot \sin \varepsilon + y_i \cdot \cos \varepsilon) = \cos \varepsilon \sum_{i=1}^n p_{x_i} y_i$$

$$n_{23} := \sum_{i=1}^n p_{y_i} (-x_i \cdot \cos \varepsilon - y_i \cdot \sin \varepsilon) = -\cos \varepsilon \sum_{i=1}^n p_{y_i} x_i$$

$$n_{33} := \sum_{i=1}^n p_{x_i} (-x_i \cdot \sin \varepsilon + y_i \cdot \cos \varepsilon)^2 + p_{y_i} (x_i \cdot \cos \varepsilon + y_i \cdot \sin \varepsilon)^2.$$

Die Kofaktorenmatrix der Parameter erhält man zu

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{N})} \begin{pmatrix} p_y n_{33} - n_{23}^2 & n_{13} n_{23} & -p_y n_{13} \\ n_{13} n_{23} & p_x n_{33} - n_{13}^2 & -p_x n_{23} \\ -p_y n_{13} & -p_x n_{23} & p_x p_y \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{N}) = p_x p_y n_{33} - p_y n_{13}^2 - p_x n_{23}^2$$

und die Kofaktorenmatrix der Neupunktkoordinaten

$$\mathbf{Q}_N = \mathbf{F} \mathbf{Q} \mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} q_N^{xx} & q_N^{xy} \\ q_N^{xy} & q_N^{yy} \end{pmatrix}$$

enthält folgende Kofaktoren:

$$q_N^{xx} = \frac{1}{\det(\mathbf{N})} (p_y n_{33} - n_{23}^2 + 2p_y n_{13} (x_N \cdot \sin \varepsilon - y_N \cdot \cos \varepsilon) + p_x p_y (x_N \cdot \sin \varepsilon - y_N \cdot \cos \varepsilon)^2)$$

$$q_N^{yy} = \frac{1}{\det(\mathbf{N})} (p_x n_{33} - n_{13}^2 + 2p_x n_{23} (x_N \cdot \cos \varepsilon + y_N \cdot \sin \varepsilon) + p_x p_y (x_N \cdot \cos \varepsilon + y_N \cdot \sin \varepsilon)^2)$$

$$q_N^{xy} = \frac{1}{\det(\mathbf{N})} (n_{13} n_{23} + p_y n_{13} (x_N \cdot \cos \varepsilon + y_N \cdot \sin \varepsilon) + p_x n_{23} (x_N \cdot \sin \varepsilon - y_N \cdot \cos \varepsilon) + p_x p_y (x_N \cdot \cos \varepsilon + y_N \cdot \sin \varepsilon)(x_N \cdot \sin \varepsilon - y_N \cdot \cos \varepsilon))$$

Der stationäre Punkt N^* des Helmertschen Punktfehlers σ_N^H , nur dieses Fehlermaß betrachten wir hier, wird als Lösung des Gleichungssystems

$$\left. \frac{\partial (\sigma_N^H)^2}{\partial x_N} \right|_{N^*} = \frac{\sigma_0^2}{\det(\mathbf{N})} (2p_x n_{23} \cos \varepsilon + 2p_y n_{13} \sin \varepsilon + 2p_x p_y x_{N^*}) = 0$$

$$\left. \frac{\partial (\sigma_N^H)^2}{\partial y_N} \right|_{N^*} = \frac{\sigma_0^2}{\det(\mathbf{N})} (2p_x n_{23} \sin \varepsilon - 2p_y n_{13} \cos \varepsilon + 2p_x p_y y_{N^*}) = 0$$

erhalten. Diese lautet

$$x_{N^*} = -\frac{p_x n_{23} \cos \varepsilon + p_y n_{13} \sin \varepsilon}{p_x p_y} = \cos \varepsilon \left(\frac{\cos \varepsilon}{p_y} \sum_{i=1}^n p_{y_i} x_i - \frac{\sin \varepsilon}{p_x} \sum_{i=1}^n p_{x_i} y_i \right) \quad (28)$$

$$y_{N^*} = -\frac{p_x n_{23} \sin \varepsilon - p_y n_{13} \cos \varepsilon}{p_x p_y} = \cos \varepsilon \left(\frac{\sin \varepsilon}{p_y} \sum_{i=1}^n p_{y_i} x_i + \frac{\cos \varepsilon}{p_x} \sum_{i=1}^n p_{x_i} y_i \right) \quad (29)$$

Die Hesse-Matrix lautet hier $2\sigma_0^2 p_x p_y \mathbf{I} / \det(\mathbf{N})$ und ist offenbar positiv definit, weshalb der stationäre Punkt N^* ein Minimum ist. Es lässt sich hier vereinfachen:

$$x_{N^*} \cdot \sin \varepsilon - y_{N^*} \cdot \cos \varepsilon = -\frac{n_{13}}{p_x}$$

$$x_{N^*} \cdot \cos \varepsilon + y_{N^*} \cdot \sin \varepsilon = -\frac{n_{23}}{p_y}$$

$$\begin{aligned}
q_{N^*}^{xx} &= \frac{1}{\det(\mathbf{N})} \left(p_y n_{33} - n_{23}^2 - p_y \frac{n_{13}^2}{p_x} \right) = \frac{1}{p_x} \\
q_{N^*}^{yy} &= \frac{1}{\det(\mathbf{N})} \left(p_x n_{33} - n_{13}^2 - p_x \frac{n_{23}^2}{p_y} \right) = \frac{1}{p_y} \\
q_{N^*}^{xy} &= \frac{1}{\det(\mathbf{N})} \left(n_{13} n_{23} - n_{13} n_{23} - n_{13} n_{23} + p_x p_y \left(\frac{n_{23}}{p_y} \right) \left(\frac{n_{13}}{p_x} \right) \right) = 0
\end{aligned}
\tag{30}$$

Die Fehlerellipsen der Neupunkte im Zielsystem sind somit im Allgemeinen abgeplattet, auch in Spezialfällen wie N^* . Die Halbachsen der Fehlerellipse von N^* sind wegen (30) parallel zu den Halbachsen der identischen Punkte im Zielsystem. Für diesen Punkt ergibt sich folgender Helmertscher Punktfehler:

$$\min(\sigma_N^H) = \sigma_{N^*}^H = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y}}$$

Die Kurven gleicher Neupunktgenauigkeit im Sinne des Helmertschen Punktfehlers sind im Allgemeinen Ellipsen um diesen Punkt.

Letztlich fragen wir, wie weit der Punkt N^* vom verallgemeinerten Schwerpunkt (0,0) abweichen kann. Offenbar fallen beide Punkte für $\varepsilon = \pm\pi/2$ zusammen. Das mag überraschen, ist aber wie folgt verständlich: Die Definition des verallgemeinerten Schwerpunktes ist nur sinnvoll, wenn die Achsen von Start- und Zielsystem schon grob parallel ausgerichtet sind, denn die Gewichte gehören ja zu den Zielsystemkoordinaten. Trotzdem haben wir diese in (27) den Startsystemkoordinaten zugeordnet. Formal entsteht dadurch kein Fehler, nur darf man die Ergebnisse nicht falsch interpretieren.

Wenn wir also $\varepsilon \approx 0$ annehmen, ergibt sich aus (28),(29)

$$\begin{aligned}
x_{N^*} &\approx \frac{1}{p_y} \sum_{i=1}^n p_{y_i} x_i \\
y_{N^*} &\approx \frac{1}{p_x} \sum_{i=1}^n p_{x_i} y_i
\end{aligned}$$

Wir erhalten gewichtete Mittel der Koordinaten der identischen Punkte mit den Gewichten, die gerade der anderen Zielsystemkoordinate zugeordnet sind. Damit gilt näherungsweise

$$\min(x_i) \leq x_{N^*} \leq \max(x_i)$$

$$\min(y_i) \leq y_{N^*} \leq \max(y_i)$$

Damit muss der Punkt N^* nicht unmittelbar in dem Gebiet der Anschlusspunkte liegen, insbesondere nicht in deren konvexer Hülle. Das passiert allerdings nur bei sehr ungewöhnlicher Gewichtung.

9 Schlussbemerkungen

Wie wichtig es ist, sich mit diesem Thema zu befassen, zeigen immer wieder selbst für manchen erfahrenen Geodäten überraschende Folgerungen. So zum Beispiel, dass die Genauigkeit transformierter Neupunkte steigt, je weiter die identischen Punkte vom Schwerpunkt entfernt sind. Man erkennt das in den Formeln (8),(9),(14),(15),(19),(20),(24),(25). Das scheint im Widerspruch zur Erfahrung zu stehen, nach der man die identischen Punkte möglichst in der näheren Umgebung um die Neupunkte sucht. Ursache für diesen Widerspruch ist, dass in großen Gebieten das einfache Transformationsmodell nicht mehr korrekt sein muss. Sinnvolle Ergebnisse würde man erhalten, wenn man nur Transformationsmodelle mit wenigen Parametern im Sinne eines Trends ansetzt und die dann großen Restklaffen in ihrer räumlichen Kovarianzstruktur analysieren und an den Neupunkten präzisieren würde. Das Verfahren ist als Koordinatentransformation mit Kollokation nach kleinsten Quadraten bekannt, wird aber leider selten verwendet.

Wir erwähnen schließlich noch, dass alle Berechnungen auch in dem Fall gültig sind, dass keine Überbestimmung vorliegt. Es können dann allerdings nur a priori Genauigkeiten berechnet werden.

Anhang: Drehung der Koordinatenachsen in Richtung der Hauptträgheitsachsen der Anschlusspunkte

Ausgehend von einem schon auf den Schwerpunkt verschobenen ebenen Koordinatensystem ξ, η dreht man dieses um den Winkel ε wie folgt:

$$x_i = \xi_i \cdot \cos \varepsilon + \eta_i \cdot \sin \varepsilon$$

$$y_i = -\xi_i \cdot \sin \varepsilon + \eta_i \cdot \cos \varepsilon$$

Damit die Achsen des Zielsystems mit den Hauptträgheitsachsen der identischen Punkte zusammen fallen, muss gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n p_i x_i y_i = \sum_{i=1}^n p_i (\xi_i \cdot \cos \varepsilon + \eta_i \cdot \sin \varepsilon)(-\xi_i \cdot \sin \varepsilon + \eta_i \cdot \cos \varepsilon) = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i ((\eta_i^2 - \xi_i^2)(\cos \varepsilon \cdot \sin \varepsilon) + \xi_i \cdot \eta_i (\cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon)) = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{1}{2} (\eta_i^2 - \xi_i^2) \sin 2\varepsilon + \xi_i \cdot \eta_i \cos 2\varepsilon \right) \end{aligned}$$

Daraus gewinnt man den Drehwinkel

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 \sum_{i=1}^n p_i \xi_i \cdot \eta_i}{\sum_{i=1}^n p_i (\xi_i^2 - \eta_i^2)}$$

unter Berücksichtigung der Quadrantenregel des Arcustangens, z.B. $\varepsilon = \pm\pi/4$, wenn der Nenner verschwindet. Bei räumlichen Transformationen erhält man drei nichtlineare Gleichungen mit drei zu bestimmenden Drehwinkeln, die iterativ gelöst werden müssen.

Literatur

- Beineke, D.: Zur Bestimmung lokaler Abbildungsverzerrungen in Altkarten mit Hilfe der multiquadratischen Interpolationsmethode. Allgemeine Vermessungsnachrichten 1/2007, 19-27
- Bilajbegovic, A.: Koordinatensysteme und Transformationen. VDV-Schriftenreihe, Band 19 GPS-Referenzstationsdienste 2001, S. 142-164, Verlag Chmielorz GmbH, Wiesbaden
- Gielsdorf, F., Gründig, L.: Nachbarschaftstreue Anpassung auf Basis des Membranmodells, Zeitschrift für Vermessungswesen, 122 (1997) 208-218
- Grafarend, E.W.: Die Genauigkeit eines Punktes im mehrdimensionalen Euklidischen Raum. Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, Heft-Nr. 153, München, 1970
- Hardy, R.L.: Geodetic Applications of Multiquadratic Analysis. Allgemeine Vermessungsnachrichten, 79 (1972) 398-406
- Helmert, F.R.: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate: mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Messinstrumente. Verlag B.G. Teubner, 1924
- Meier, S.: Vom Punktlagefehler zum Qualitätsmodell. In: Friedhelm F. Krumm und V.S. Schwarze (Hrsg.): Quo vadis geodesia...? Festschrift for Erik W. Grafarend on the occasion of his 60th birthday. Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Universität Stuttgart 1999
- Moritz, H.: Least-squares collocation, Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe A, Heft-Nr. 75, München, 1973
- Reinking, J., Geodätische Analyse inhomogener Deformationen mit nichtlinearen Transformationsfunktionen, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Heft 413, Verl. der Bayer. Akad. der Wiss. 1994
- Werkmeister, P.: Über die Genauigkeit trigonometrischer Punktbestimmungen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 49 (1920) 401-412, 433-456.
- Wolf, H.: Ausgleichsrechnung I: Formeln zur praktischen Anwendung. Bonn 1994 (2. Auflage)